Travaux Dirigés (Mathématiques pour la Physique)

Correction

Exercice 1

1°) - Calculons la norme des trois vecteurs

$\vec{u} = \vec{e_1} + \vec{e_2} - \vec{e_3}$; $\vec{v} = 2\vec{e_1} - \vec{e_2} + \vec{e_3}$

$\vec{w} = \vec{e_1} - 2\vec{e_2} - \vec{e_3}$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{6}$

$\|\vec{w}\| = \sqrt{6}$

- Calculons les produits scalaires

* $\vec{u}.\vec{v} = (1\times 2) + (1\times -1) + (-1 \times 1) = 2 - 1 - 1$

$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = 0}$ $\boxed{\vec{v}.\vec{w} = 3}$

$\boxed{\vec{u}.\vec{w} = 0}$

- Calculons les produits vectoriels

* $\vec{u} \wedge \vec{v}$

$$\vec{u} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{v} \qquad \vec{u} \wedge \vec{v} = (1-1)\vec{e}_1 + (-2-1)\vec{e}_2 + (-1-2)\vec{e}_3$$

$$= -3\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$$

$$\boxed{\vec{u} \wedge \vec{v} = -3\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3}$$

$$\boxed{\vec{u} \wedge \vec{w} = -3\vec{e}_1 - 3\vec{e}_3}$$

$$\boxed{\vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{0}}$$

$$\boxed{\vec{v} \wedge \vec{w} = 3\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3}$$

2) Calculons le produit mixte $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (-1)^2\, 1 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^3 \times 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^4\, 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(1+2) + (-2)(-1-2) + 1(1-1)$$

$$= 3 + 6 + 0$$

$$\boxed{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 9}$$

Le produit mixte calculer représente le volume du parallélopipède construis par $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ (signification géométrique)

3°) Calculons les composantes des vecteurs :

* $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \times \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$$
$$= 0 \times \vec{v} - 0 \times \vec{w}$$

$$\boxed{\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{0}}$$

* $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = -\vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v})$$
$$= -((\vec{w} \cdot \vec{v}) \times \vec{u} - (\vec{w} \cdot \vec{u}) \times \vec{v})$$
$$= -(3 \times \vec{u} - 0 \times \vec{v})$$

$$\boxed{(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = -3\vec{u}}$$

<u>Conclusion</u> : Le produit vectoriel n'est pas associatif

4°) $\vec{A} = \vec{u} - \vec{v}$ et $\vec{B} = -\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

Calculons les composantes de ces vecteurs

$$\vec{A} = (\vec{e}_1 - 2\vec{e}_1) + (\vec{e}_2 + \vec{e}_2) + (-\vec{e}_3 - \vec{e}_3)$$
$$\vec{A} = (-\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + (-2\vec{e}_3)$$

$$\boxed{\vec{A} = -\vec{e_1} + 2\vec{e_2} - 2\vec{e_3}} \quad \text{ou} \quad \vec{A} = (-1, 2, -2)$$

$$\vec{B} = (-\vec{e_1} + 2\vec{e_1} + \vec{e_1}) + (-\vec{e_2} + (-\vec{e_2}) - 2\vec{e_2}) + (+\vec{e_3} + \vec{e_3} - \vec{e_3})$$

$$= 2\vec{e_1} + (-4\vec{e_2}) + (+\vec{e_3})$$

$$= 4\vec{e_1} - 4\vec{e_2} + \vec{e_3}$$

$$\boxed{\vec{B} = 2\vec{e_1} - 4\vec{e_2} + \vec{e_3} \quad \text{ou} \quad \vec{B} = (2, -4, +1)}$$

5)- Calculons le produit scalaire $\vec{A}.\vec{B}$

$$\vec{A}.\vec{B} = (-1 \times 2) + (-4 \times 2) + (1 \times -2)$$

$$= -2 + (-8) - 2$$

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B} = -12}$$

- Calculons le produit vectoriel $\vec{A} \wedge \vec{B}$

$$\vec{A} \left| \begin{array}{cc} -1 & 2 \\ 2 & -4 \\ -2 & 1 \end{array} \right| \vec{B}$$

$$\begin{array}{cc} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{array}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (2 - 8)\vec{e_1} + ((-4) + 1)\vec{e_2} + (4 - 4)\vec{e_3}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = -6\vec{e_1} + 3\vec{e_2}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = -6\vec{e_1} - 3\vec{e_2}$$

$$\boxed{\vec{A}\wedge\vec{B} = -6\,\vec{e}_1 - 3\,\vec{e}_2}$$

* En utilisant les produits scalaires et vectoriels de la question 1)

* Produit ~~vecto~~ scalaire

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (\vec{u} - \vec{v})\cdot(-\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$$

$$= -\vec{u}^2 + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{u} - \vec{v}^2 - \vec{v}\cdot\vec{w}$$

$$= -\|\vec{u}\|^2 + 0 + 0 + 0 - \|\vec{v}\|^2 - 3$$

$$= -3 - 6 - 3$$

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = -12}$$

$$\vec{A}\wedge\vec{B} = (\vec{u} - \vec{v})\wedge(-\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$$

$$= (\vec{u} - \vec{v})\wedge(-\vec{u}) + (\vec{u} - \vec{v})\wedge\vec{v} + (\vec{u} - \vec{v})\wedge\vec{w} +$$

$$= -\vec{u}\wedge\vec{u} + \vec{u}\wedge\vec{v} + \vec{v}\wedge\vec{u} - \vec{v}\wedge\vec{v} + \vec{w}\wedge\vec{u} - \vec{w}\wedge\vec{v}$$

$$= 0 + \vec{u}\wedge\vec{v} + \vec{v}\wedge\vec{u} - 0 + \vec{w}\wedge\vec{u} - \vec{w}\wedge\vec{v}$$

$$\vec{w}\wedge\vec{u} + \vec{v}\wedge\vec{w} + 2\,\vec{v}\wedge\vec{u}$$

$$= -\vec{u}\wedge\vec{w} + \vec{v}\wedge\vec{w}$$

$$= 3\vec{e}_1 + 3\vec{e}_3 + 3\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$$

$$= 6\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$$

$= -3\vec{e_1} + 3\vec{e_3} + 3\vec{e_1} + 3\vec{e_2} - 3\vec{e_1} + 6\vec{e_2} + 6\vec{e_3}$

$\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{u} \wedge \vec{u} + \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{u} - \vec{v} \wedge \vec{v} - \vec{v} \wedge \vec{w}$

$= 0 + \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{u} - 0 - \vec{v} \wedge \vec{w}$

$\cancel{= -3\vec{e_2} - 3\vec{e_3}}$

$= \vec{u} \wedge \vec{w} - \vec{v} \wedge \vec{w}$ Car $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$

$= -3\vec{e_1} - 3\vec{e_3} - 3\vec{e_1} - 3\vec{e_2} + 3\vec{e_3}$

$$\boxed{\vec{A} \wedge \vec{B} = -6\vec{e_1} - 3\vec{e_1}}$$

Exercice 2

En utilisant les propriétés du produit scalaire, démontrons que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifiant $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$ sont orthogonaux

$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\| \Rightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$

$\Rightarrow \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v}$

$\Rightarrow 2\vec{u}\cdot\vec{v} = -2\vec{u}\cdot\vec{v}$

$\Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = -\vec{u}\cdot\vec{v}$

$\Rightarrow \quad 2\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

$\Rightarrow \quad \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux pour la convention que le vecteur nul est orthogonal à n'importe quel vecteur

Exercice 3

$A(a, 0; 0) \quad B(0, b, 0), \quad C(0, 0, c)$ Repère $\{O; \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$

1°) Déterminons les coordonnées d'un vecteur unitaire $\vec{n}$ perpendiculaire au plan ABC.

$$\vec{n} = \frac{\vec{AB} \wedge \vec{AC}}{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|} \qquad \text{Avec } \begin{cases} \vec{AB} = (-a, b, 0) \\ \vec{AC} = (-a, 0, c) \end{cases}$$

$\vec{AB} \wedge \vec{AC}$

$$\vec{AB} \begin{vmatrix} -a & -a \\ b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} \vec{AC}$$

$$\begin{matrix} -a & -a \\ b & 0 \end{matrix}$$

$$\cancel{\vec{AB} \wedge \vec{AC} = bc\,\vec{e_1} + (-a + ac)\vec{e_2} + (-a + ab)e_3}$$

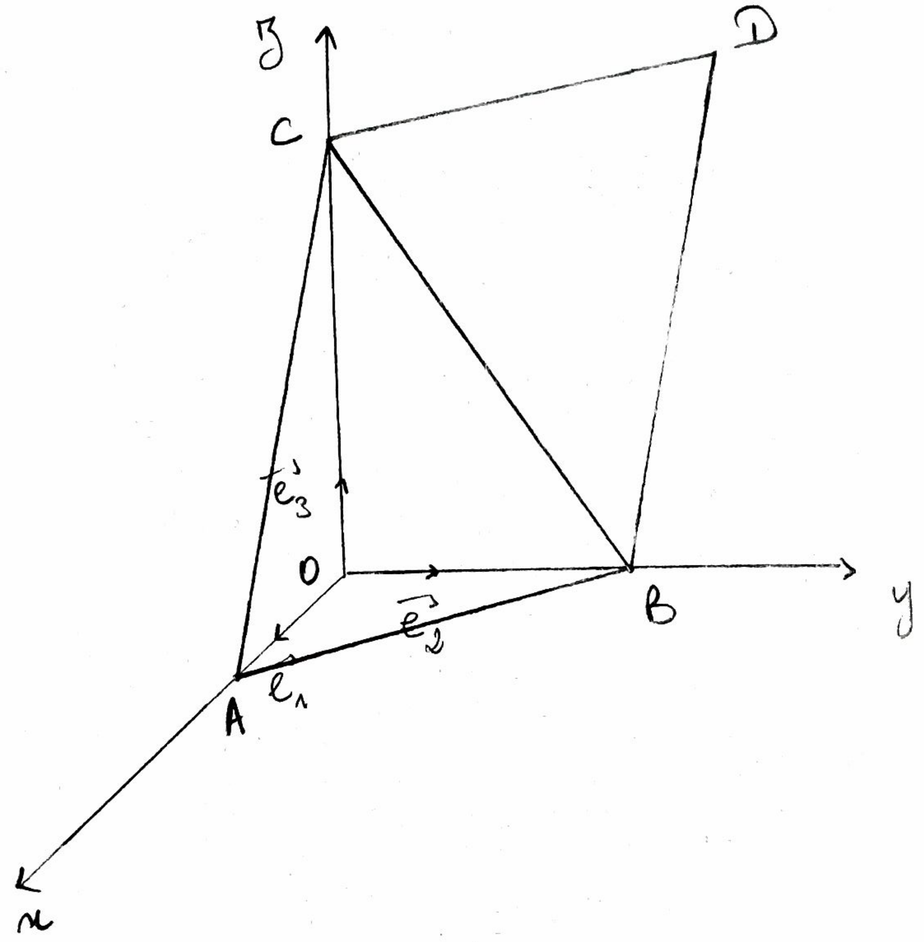
$$\boxed{\vec{AB} \wedge \vec{AC} = (bc, ac, ab)}$$

$$\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = \sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}$$

donc $\vec{n} = \left(\frac{bc}{r}, \frac{ac}{r}, \frac{ab}{r}\right)$ avec $r = \sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}$

2°) Calculons l'aire S du triangle ABC en utilisant la notion de produit vectoriel.

Posons $a = 1$, $b = 2$ et $c = 3$



$S_{ABDC} = \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$ or $S_{ABDC} = 2 S_{ABC}$

donc $\boxed{S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|}$

$\Rightarrow \boxed{S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}}$

3°) Ecrivons l'équation du plan ABC

Soit $M = (x, y, z) \in ABC$

alors $\vec{AM} \perp (\vec{AB} \wedge \vec{AC})$ i-e $(ABC) : \vec{AM} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = 0$

$$\begin{pmatrix} x - a \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} bc \\ ac \\ ab \end{pmatrix} = 0$$

$bc\,x - abc + ac\,y + ab\,z = 0$

$(ABC) : bc\,x + ac\,y + ab\,z - abc = 0$

5°) Déterminons le volume du parallélépipède construit sur AO, AB, AC

$$V = |(\vec{AO}, \vec{AB}, \vec{AC})|$$

$$= |\vec{AO} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC})|$$

$$V = |abc|$$

25/05/2018

Exercice 4

Demontrons la formule de Lagrange

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot (\vec{C} \wedge \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

On a : $(\vec{A}, \vec{B}, (\vec{C} \wedge \vec{D})) = \vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge (\vec{C} \wedge \vec{D}))$

or $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge (\vec{C} \wedge \vec{D})) = \vec{A} \cdot \left[(\vec{B} \cdot \vec{D}) \cdot \vec{C} - (\vec{B} \cdot \vec{C}) \cdot \vec{D} \right]$

$$= (\vec{A} \cdot \vec{C}) \cdot (\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

On a aussi $(\vec{A}, \vec{B}, (\vec{C} \wedge \vec{D})) = ((\vec{C} \wedge \vec{D}), \vec{A}, \vec{B})$

$$= (\vec{C} \wedge \vec{D}) \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B})$$

$$= (\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot (\vec{C} \wedge \vec{D})$$

$$(\vec{A}, \vec{B}, (\vec{C} \wedge \vec{D})) = ((\vec{C} \wedge \vec{D}), \vec{A}, \vec{B}) = (\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot (\vec{C} \wedge \vec{D})$$

D'où $(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot (\vec{C} \wedge \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{B})(\vec{B} \cdot \vec{C})$

Exercice 5

Ecrivons les dérivées partielles jusqu'au deuxième ordre des fonctions suivantes :

1°) $f(x, y) = x\cos(y^2)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \text{ avec } \frac{\partial f}{\partial x} = \cos(y^2)$$

d'où $$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2xy\sin(y^2)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x\left(\sin(y^2) + 2y^2\cos(y^2)\right)}$$

2°) $g(x, y) = x^y \quad x \geqslant 0$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = y\,x^{(y-1)}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = y(y-1)\,x^{y-2}}$$

$$* \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(e^{y\ln x}\right)' = \ln x\, e^{y\ln x}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (\ln x)^2 e^{y\ln x}} \quad \text{avec } x > 0$$

Pour $x = 0$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y} = \left(\ln x \,.\, e^{y\ln x}\right)'_x$$

$$= \frac{1}{x} e^{y\ln x} + \ln x \times \left(y \times \frac{1}{x} e^{y\ln x}\right)$$

$$= \frac{e^{y\ln x}}{x}(1+y\ln x)$$

$$= e^{y\ln x - \ln x}(1+y\ln x$$

$$\boxed{= x^{(y-1)}(1+y\ln x),\ x>0}$$

* $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = \left(y x^{y-1}\right)'_y$

$$= x^{(y-1)} + y\left(x^{(y-1)}\right)'_y \quad \text{or } x^{y-1} = e^{(y-1)\ln x}$$

donc $\left(e^{(y-1)\ln x}\right)'_y = \ln x \, e^{(y-1)\ln x}$

$$= x^{y-1} \times \ln x \quad , x>0$$

Par transitivité $\left(x^{(y-1)}\right)'_y = x^{(y-1)} \times \ln x$

d'où $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = x^{y-1} + y\left(x^{y-1} \times \ln x\right)$

$$\boxed{\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = x^{(y-1)}(1+y\ln x) \quad x>0}$$

Exercice 7

1) Calculons T

$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{9,807}}$ $\boxed{T = 2s}$

2°/ Déterminons la variation de la période

$\cancel{f}$ $l_f = l_i + 0,01 = 1,01\ m$

$T_f = 2\pi\sqrt{\frac{1,01}{9,807}}$ $T_f = 2,01\,s$.

$\Delta T = T_f - T_i = 2,01 - 2$

$\boxed{\Delta T = 0,01\,s}$

<u>Autre méthode</u>

Calculons la différentielle de T :

$$dT = T'(l)\,dl$$

$$= 2\pi \times \left(\sqrt{\frac{l}{g}}\right)' dl$$

$$= 2\pi \times \frac{\left(\frac{l}{g}\right)'}{2\sqrt{\frac{l}{g}}}\,dl$$

$$= \pi \times \frac{1}{g} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{l}{g}}}\,dl$$

$$= \frac{\pi}{g\sqrt{\frac{l}{g}}}\,dl$$

$$\boxed{dT = \frac{\pi}{\sqrt{gl}}\,dl}$$

$$dT = \frac{\pi}{\sqrt{9,807 \times 1}} \times 0,01$$

$$\boxed{dT = 0,01\ s}$$

Exercice 8

$$\mu = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

Déterminons les fonctions f tel que $\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} = 0$

Déterminons $\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2}$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)' \times f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)'_x$$

$$= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)' f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} f''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)' = \frac{y^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}$$

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} = \frac{y^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3} f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + \frac{x'}{\sqrt{x^2+y^2}} f''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} = \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)' \times f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \times f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \times f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)'$$

$$\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)' = \frac{x^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3} \times f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \times f''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + \frac{x^2+y^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} f''(\sqrt{}}$$

En posant $t = \sqrt{x^2+y^2}$ On a

$$\frac{1}{t} f'(t) + f''(t) = 0$$

$$f''(t) + \frac{1}{t} f'(t) = 0 \quad (E)$$

Posons $F(t) = f'(t)$ d'où

(E) s'écrit $F'(t) + \left(\frac{1}{t}\right) F(t) = 0$

$\Rightarrow F'(t) = -\frac{1}{t} F(t)$

$\Rightarrow \frac{F'(t)}{F(t)} = -\frac{1}{t}$

$\Rightarrow \int \frac{F'(t)}{F(t)} dt = \int -\frac{1}{t} \, dt$

$\Rightarrow \ln|F(t)| + C_1$ avec $C \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow -\int \frac{1}{t} \, dt = -\ln(t) + C_2$

$\Rightarrow \ln|F(t)| = -\ln(t) + C_3$

$\Rightarrow e^{\ln|F(t)|} = e^{-\ln(t) + C_3}$

$\Rightarrow |F(t)| = e^{C_3} \times e^{-\ln(t)}$

$\Rightarrow |F(t)| = e^{C_3} \times \frac{1}{t}$

$\Rightarrow F(t) = \pm e^{C_3} \cdot \frac{1}{t}$

$\Rightarrow F(t) = \frac{C_4}{t}$ avec $C_4 = \pm e^{C_3}$

$\Rightarrow f'(t) = \frac{C_4}{t} \Rightarrow \boxed{f(t) = C_4 \ln t + C_5}$

Les fonctions f pour lesquelles $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ sont de la forme

$$\boxed{f(t) = C_4 \ln(t) + C_5}$$

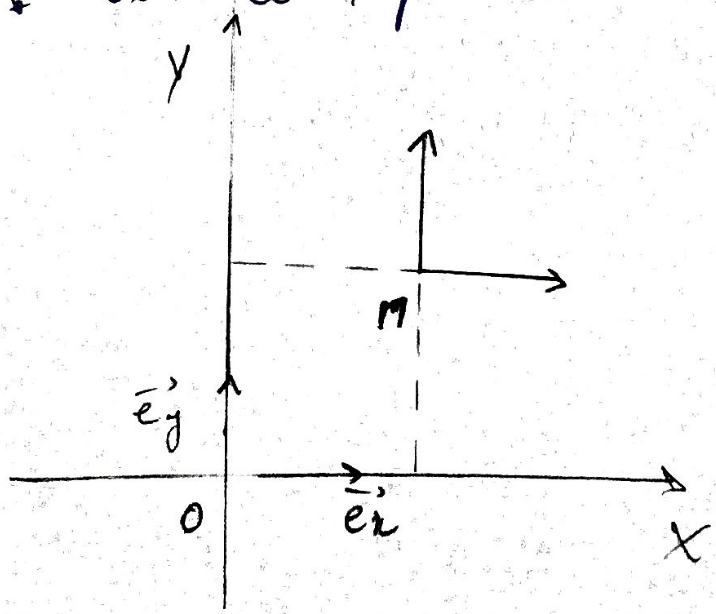
Exercice 9

M est repéré par ρ et φ

$M \in \{O, \vec{e}_x, \vec{e}_y\}$

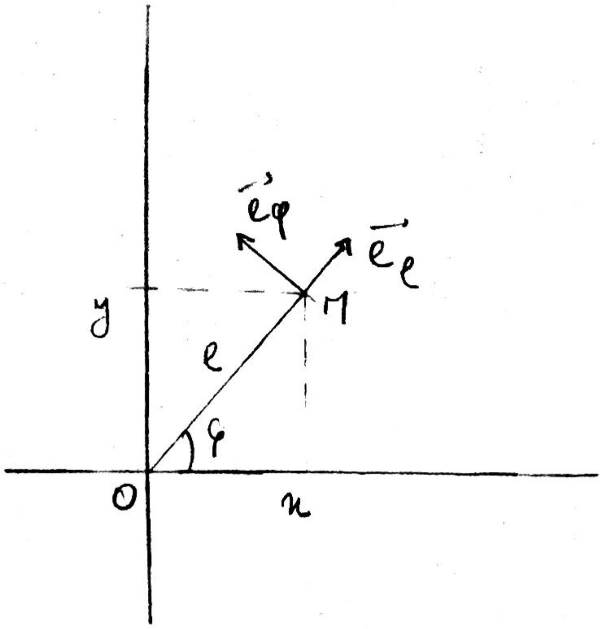
1°) Ecrivons les composantes du vecteur $\vec{OM}$ dans le repère local cartésien puis dans le repère polaire

- Dans le repère cartésien



On a $\boxed{\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y}$

Dans le repère polaire



On a $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y$

Or $x = \rho\cos\varphi$ et $y = \rho\sin\varphi$

$$\vec{e}_\rho = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho}}{N_\rho} \quad \text{et} \quad \vec{e}_\varphi = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi}}{N_\varphi}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho} = \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y \\ \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} = \rho\cos\varphi\,\vec{e}_y - \rho\sin\varphi\,\vec{e}_x \end{cases}$$

$$N_\rho = \left\| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho} \right\| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}$$
$$= 1$$

$$N_\varphi = \left\| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} \right\| = \sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi}$$
$$= \rho$$

On a :

$$\begin{cases} \vec{e_\rho} = \cos\varphi \, \vec{e_x} + \sin\varphi \, \vec{e_y} \\ \vec{e_\varphi} = -\sin\varphi \, \vec{e_x} + \cos\varphi \, \vec{e_y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1) \quad \sin\varphi \, \vec{e_\rho} = \sin\varphi \cos\varphi \, \vec{e_x} + \sin\varphi \sin\varphi \, \vec{e_y} \\ (2) \quad \cos\varphi \, \vec{e_\rho} = -\sin\varphi \cos\varphi \, \vec{e_x} + \cos^2\varphi \, \vec{e_y} \end{cases}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow (\sin\varphi + \cos\varphi) \, \vec{e_\rho} = \vec{e_y}$$

$$\boxed{\vec{e_y} = \cos\varphi \, \vec{e_\rho} + \sin\varphi \, \vec{e_\rho}}$$

$$\begin{cases} (1) \quad \cos\varphi \, \vec{e_\rho} = \cos^2\varphi \, \vec{e_x} + \sin\varphi \cos\varphi \, \vec{e_y} \\ (2) \quad \sin\varphi \, \vec{e_\varphi} = \sin\varphi \cos\varphi \, \vec{e_y} - \sin^2\varphi \, \vec{e_x} \end{cases}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow \boxed{\vec{e_x} = \cos\varphi \, \vec{e_\rho} - \sin\varphi \, \vec{e_\varphi}}$$

$\vec{OM} = \rho \cos\varphi \, \vec{e_x} + \rho \sin\varphi \, \vec{e_y}$ en remplaçant $\vec{e_x}$ et $\vec{e_y}$

on a $\boxed{\vec{OM} = \rho \, \vec{e_\rho}}$

2°) Calculons $\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho}$ et $\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi}$

* $\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho}$

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho} = \cos\varphi\, \vec{e_x} + \sin\varphi\, \vec{e_y} \\ \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi} = -\rho\sin\varphi\, \vec{e_x} + \rho\cos\varphi\, \vec{e_y} \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho} = \vec{e_\rho}} \qquad \boxed{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi} = \rho\vec{e_\varphi}}$$

Endeduisons l'expression du deplacement elementaire $d\vec{OM}$ en coordonnées polaire

$$d\vec{OM} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi} d\varphi$$

$$\boxed{d\vec{OM} = d\rho\, \vec{e_\rho} + \rho\, d\varphi\, \vec{e_\varphi}}$$

3) $\rho = a e^{\varphi}$ Calculons $d\vec{OM}$

$d\rho = \rho' d\varphi = a e^{\varphi} d\varphi$

$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = a\, e^{\varphi}\, d\varphi\, (\vec{e}_\rho + \vec{e}_\varphi)}$$

4°) $\theta = wt$, w constante

Ecrivons les composantes du vecteur vitesse $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ dans le repère local polaire

$$d\overrightarrow{OM} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} d\varphi$$

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\varphi(t) = wt$$

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{e}_\rho \frac{d\rho}{dt} + \rho\, \vec{e}_\varphi \frac{d\varphi}{dt}$$

$\cancel{\rho(\varphi)}$ $\rho(\varphi) = a\, e^{\varphi} \Rightarrow \rho(t) = a\, e^{wt}$

$$\rho'(t) = a w e^{wt}$$

$$\varphi'(t) = w$$

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = a w e^{wt} \vec{e}_\rho + w \rho\, \vec{e}_\varphi$$

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = a\omega e^{\omega t}\left(\overrightarrow{e_\rho} + \overrightarrow{e_\varphi}\right)}$$